PART4　共線条件

例題

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　3 点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ。

(3)　PQ：QC を求めよ。

Point Pickup

練習

△ABC において，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D，辺 BC を 2 : 1 に外分する点を E，辺 BC の中点を M とし，△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG : GE を求めよ。

第11講　PART4 確認問題

△ABC において，辺 AB を 1：3 に内分する点を P，辺 AC の中点を Q，辺 BC を 3：1 に外分する点を R とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。

1　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{AR}=-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{b}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}$$

である。

2　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと，

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}\vec{b}+\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\vec{c},$$

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}\vec{b}+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}\vec{c}$$

である。

3　3 点 P，Q，R が一直線上にあることを証明する。

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}(-\vec{b}+\boxed{ナ}\vec{c})$$

$$\overrightarrow{PR}=\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}(-\vec{b}+\boxed{ネ}\vec{c})$$

であるから，

$$\overrightarrow{PR}=\boxed{ノ}\overrightarrow{PQ}$$

よって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

また，PQ：QR＝$\boxed{ハ}$：$\boxed{ヒ}$ である。

[MEMO]

PART4　共線条件

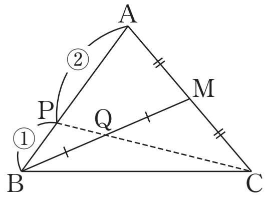
例題

△ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を P，辺 AC の中点を M，線分 BM の中点を Q とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　3 点 P，Q，C は一直線上にあることを証明せよ。

(3)　PQ：QC を求めよ。



(1)　$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM}}{2}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

(2)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{b}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}=\frac{1}{12}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(-2\vec{b}+3\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{PC}=4\overrightarrow{PQ}$ より，3 点 P，Q，C は一直線上にある。

(3)　(2)より　PQ：QC＝1：3

練習

△ABC において，辺 AB を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 2：1 に外分する点を E，辺 BC の中点を M とし，△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

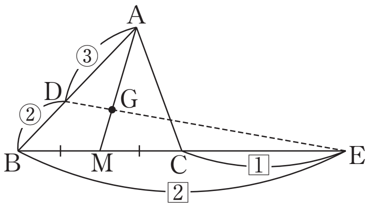
(1) $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AG}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 3 点 D，G，E は一直線上にあることを証明し，DG：GE を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{5}\vec{b}$

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{2-1}=-\vec{b}+2\vec{c}$



(2) $\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(3) $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\dfrac{3}{5}\vec{b}=-\dfrac{4}{15}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=(-\vec{b}+2\vec{c})-\dfrac{3}{5}\vec{b}=-\dfrac{8}{5}\vec{b}+2\vec{c}=\dfrac{6}{15}(-4\vec{b}+5\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{DE}=6\overrightarrow{DG}$ であるから，3 点 D，G，E は一直線上にある。

また，DG：GE＝1：5 である。

第11講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：4，ウ：1，エ：2，オ：1，
カ：2，キ：3，ク：2

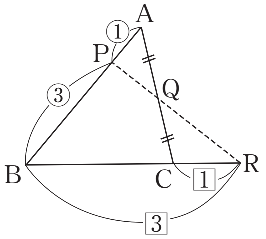
[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{4}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-1\times\vec{b}+3\times\vec{c}}{3-1}$ [A]

$=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$



[A]　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m：n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると，

$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$

2

[正解] ケコ：−1，サ：4，シ：1，ス：2，
セソ：−3，タ：4，チ：3，ツ：2

[解説]

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ [B]

$=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{b}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right)-\frac{1}{4}\vec{b}$

$=-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$

[B]　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表す。

3 **[正解]** テ：1，ト：4，ナ：2，ニ：3，ヌ：4，ネ：2，
ノ：3，ハ：1，ヒ：2

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{1}{4}(-\vec{b}+2\vec{c})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-\frac{3}{4}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}$$

$$=\frac{3}{4}(-\vec{b}+2\vec{c})$$

であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=3\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$ [C]

よって，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

また，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ であるから，

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{PR}=1:3$$

よって，PQ：QR＝**1：2**

[C]　3 点 P，Q，R が一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を満たす実数 k が存在する